III CLASSE

DISEQUAZIONI

Prerequisiti: Principi di equivalenza delle equazioni
Equazioni di primo grado
Segno di un trinomio di secondo grado
Equazioni di secondo grado

Obiettivi : Saper risolvere disequazioni di primo e di secondo grado, intere e fratte
Saper risolvere i sistemi di disequazioni

TEORIA in sintesi

Definizione: Una disequazione è una disuguaglianza tra due espressioni contenente almeno un'incognita.

Risolvere una disequazione significa determinare l'insieme S dei valori dell'incognita che rendono vera la disuguaglianza.

Primo principio di equivalenza delle disequazioni

- Addizionando o sottraendo ad ambedue i membri di una disequazione una stessa espressione si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Secondo principio di equivalenza delle disequazioni

- moltiplicando o dividendo ambedue i membri di una disequazione per una stessa espressione POSITIVA si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Terzo principio di equivalenza delle disequazioni

- moltiplicando o dividendo ambedue i membri di una disequazione per una stessa espressione NEGATIVA e CAMBIANDO IL VERSO della diseguaglianza si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Data la disequazione intera $ax > b$ si ha:

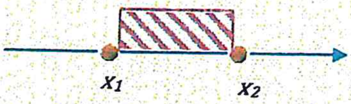
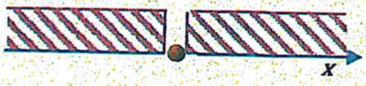
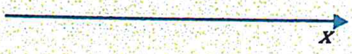
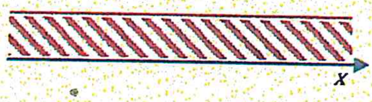
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{se } a>0 \rightarrow x>\dfrac{b}{a} \\[2ex] \text{se } a<0 \rightarrow x<\dfrac{b}{a} \\[2ex] \text{se se } a=0 \quad \begin{cases} \text{se } b\geq 0 \rightarrow S=\varnothing \\ \text{se } b<0 \rightarrow S=\Re \end{cases} \end{array}}$$

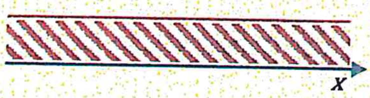
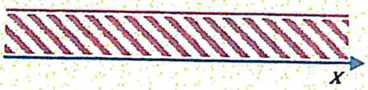
ESEMPI

$3x>-5 \rightarrow x>-\dfrac{5}{3}$ $\qquad -2x>7 \rightarrow x<-\dfrac{7}{2}$ $\qquad 0x>3 \rightarrow S=\varnothing$ $\qquad 0x>-4 \rightarrow S=\Re$

1

Disequazioni di Secondo Grado

$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$ l'equazione associata ha due soluzioni reali e distinte: $x_1 \neq x_2$	 $x < x_1 \cup x > x_2$ valori esterni	 $x_1 < x < x_2$ valori interni
$\Delta = 0$ l'equazione associata ha due soluzioni reali e coincidenti: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	 $x \neq -\frac{b}{2a}$ tutti i numeri tranne $-\frac{b}{2a}$	 nessuna soluzione
$\Delta < 0$ l'equazione associata non ammette soluzioni reali	 $\forall x \in \mathbb{R}$	 nessuna soluzione

$a > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$\Delta > 0$ l'equazione associata ha due soluzioni reali e distinte: $x_1 \neq x_2$	 $x \leq x_1 \cup x \geq x_2$ valori esterni con estremi compresi	 $x_1 \leq x \leq x_2$ valori interni con estremi compresi
$\Delta = 0$ l'equazione associata ha due soluzioni reali e coincidenti: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	 $\forall x \in \mathbb{R}$	 solo $x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$ l'equazione associata non ammette soluzioni reali	 $\forall x \in \mathbb{R}$	 nessuna soluzione

disequazioni di secondo grado immediate			
$x^2 > 0 \rightarrow x \neq 0$	$x^2 \geq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$	$x^2 < 0 \rightarrow$ *nessuna soluzione*	$x^2 \leq 0 \rightarrow x = 0$

Sistema di disequazioni di secondo grado

Se hai un sistema di disequazioni devi semplicemente risolvere ogni disequazione e porre i risultati su un grafico: le soluzioni del sistema sono i valori validi contemporaneamente per tutte le disequazioni. Vediamo come procedere su un semplice esempio

---

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 16 < 0 \end{cases}$$

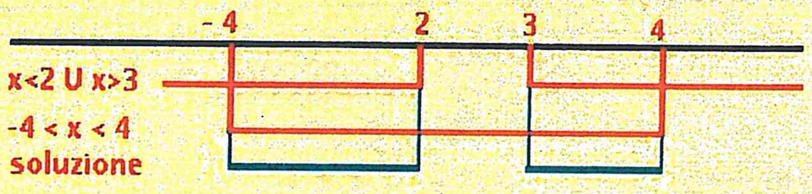
la prima $x^2 - 5x + 6 > 0$ e' verificata per $x < 2 \cup x > 3$ Calcoli

la seconda $x^2 - 16 < 0$ e' verificata per $-4 < x < 4$ Calcoli

quindi il mio sistema e' equivalente al sistema

$$\begin{cases} x < 2 \cup x > 3 \\ -4 < x < 4 \end{cases}$$

Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i



valori che risolvono le disequazioni

Devo prendere i valori che risolvono contemporaneamente entrambe le disequazioni

ed ottengo come risultato

$$-4 < x < 2 \quad \cup \quad 3 < x < 4$$

---

4 Metodo pratico per la risoluzione delle disequazioni fratte

Un metodo veloce e schematico per risolvere le disequazioni fratte consiste nello studio del segno del numeratore e del denominatore.
Se tali segni vengono rappresentati graficamente su due rette parallele, da essi si può dedurre il segno della frazione con la regola dei segni della divisione.

Osserva gli esempi e completa

1 $$\frac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4}<0$$

Si studia il segno del numeratore e del denominatore ponendoli entrambi > 0, indipendentemente dal verso della disequazione.

$N>0 \quad x^2-5x+4>0 \quad x^2-5x+4=0 \quad x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm3}{2} \begin{cases}1\\4\end{cases}$

Soluzioni: $N>0$ se $x<1$ e $x>4$

$D>0 \quad x^2+4x+3>0 \quad x^2+4x+3=0 \quad x=-2\pm\sqrt{4-3}=-2\pm1 \begin{cases}-3\\-1\end{cases}$

Soluzioni: $D>0$ se $x<-3$ e $x>-1$

Si rappresentano graficamente i segni del N e del D e, nei singoli intervalli, si ricava il segno della frazione con la regola dei segni della divisione:

		−3		−1		1		4	
$N>0$	+		+		+		−		+
$D>0$	+		−		+		+		+
segno della frazione ⟶	+		−		+		−		+

Poiché la disequazione chiede quando il quoziente è negativo (< 0), le soluzioni sono: $-3<x<-1$ e $1<x<4$.

2 $$\frac{x^2-13x+12}{x+3}>0$$

Si studia il segno del N e del D, ponendoli > 0:

$N>0 \quad x^2-13x+12>0$ ....

Soluzioni: ....

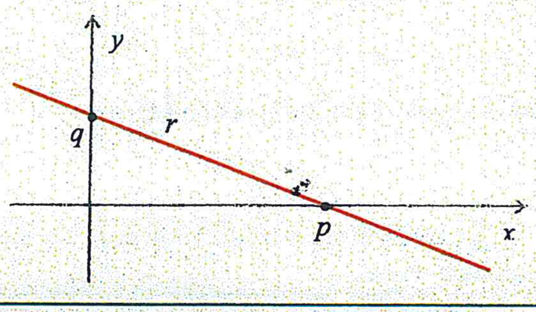
$D>0 \quad x+3>0$ ....

Si rappresenta graficamente il segno del N e del D e si ricava il segno del quoziente nei singoli intervalli:

$N>0 \longrightarrow$ ....

Geometria analitica: la retta

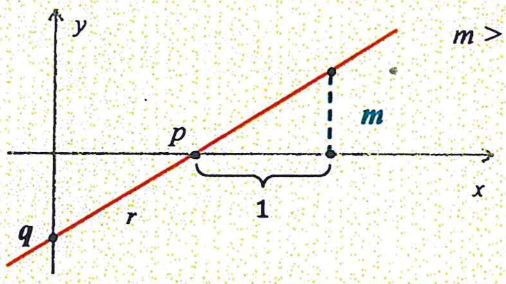
equazione della retta

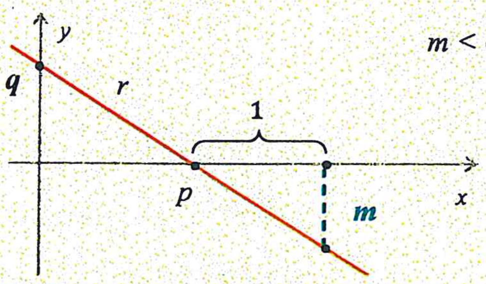


$ax + by + c = 0$	forma implicita
$y = mx + q$	forma esplicita
$\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$	forma segmentaria

nella forma esplicita	nella forma segmentaria
• m è detto coefficiente angolare $m = -\dfrac{a}{b}$	• p è il punto di intersezione tra la retta e l'asse x
• q è il punto di intersezione tra la retta e l'asse y $q = -\dfrac{c}{b}$	• q è il punto di intersezione tra la retta e l'asse y

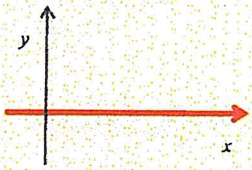
significato geometrico di m di p e di q





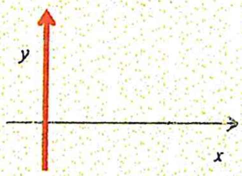
il coefficiente angolare m è l'ordinata del punto che ha distanza di 1 unità dal punto P di intersezione di r con l'asse x

rette particolari



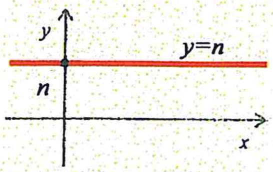
equazione asse x

$y = 0$



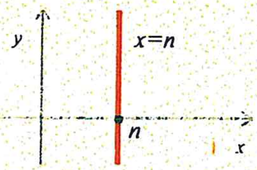
equazione asse y

$x = 0$



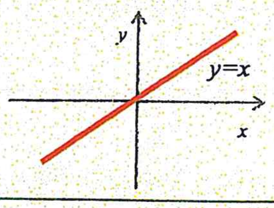
equazione retta parallela all'asse x

$y = n$



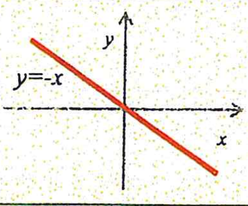
equazione retta parallela all'asse y

$x = n$



equazione della bisettrice del I e III quadrante

$y = x$



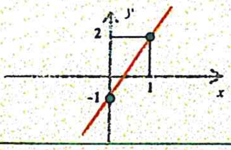
equazione della bisettrice del II e IV quadrante

$y = -x$

Per disegnare una retta basta trovare le coordinate di almeno due punti e congiungerli.
Le coordinate di un punto si trovano assegnando alla x un valore a piacere e calcolando la corrispondente y

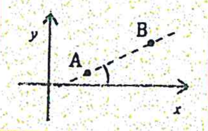
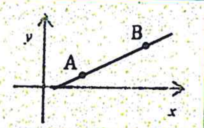
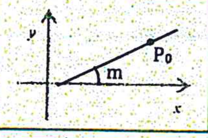
Disegnamo ad esempio la retta
$y = 3x - 1$

x	y
0	-1
1	2



Geometria analitica: la retta

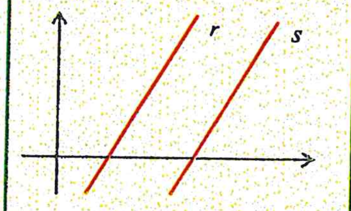
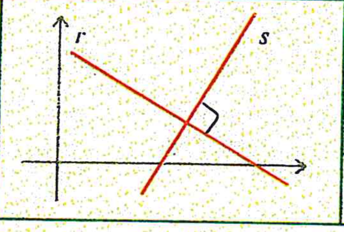
ricerca dell'equazione di una retta

$m_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$		formula per trovare il coefficiente angolare della retta passante per due punti $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$
$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$		formula per trovare l'equazione della retta passante per due punti $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$
$y - y_0 = m(x - x_0)$		formula per trovare l'equazione della retta noto un punto $P_0(x_0, y_0)$ ed il coefficiente angolare m **equazione del fascio di rette**

per trovare l'equazione di una retta passante per due punti $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ si può anche:

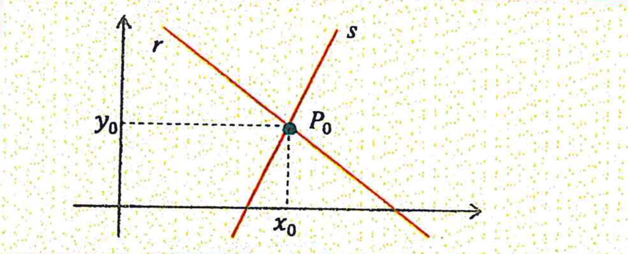
- calcolare il coefficiente angolare m_{AB} con la formula precedente
- utilizzare la formula dell'equazione del fascio di rette sostituendo ad m il valore m_{AB} ed a x_0, y_0 le coordinate di uno qualsiasi dei due punti A o B

condizione di parallelismo e perpendicolarità tra due rette

	$m_r = m_s$ due rette parallele hanno i coefficienti angolari uguali		$m_r = -\dfrac{1}{m_s}$ due rette perpendicolari hanno i coefficienti angolari antireciproci

punto e retta

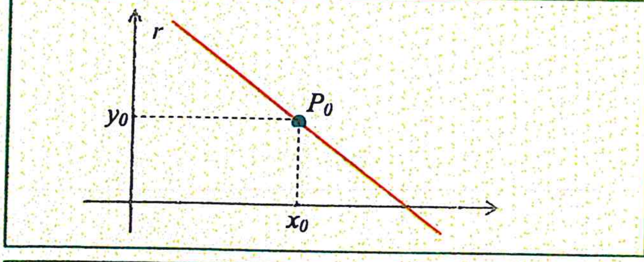
ricerca del punto P_0 di intersezione di due rette non parallele



per trovare le coordinate del punto $P_0(x_0, y_0)$ di intersezione di due rette r ed s non parallele:

- si mettono a sistema le equazioni delle due rette $\begin{cases} r \\ s \end{cases}$
- si risolve il sistema
- le soluzioni x_0 , y_0 del sistema rappresentano le coordinate del punto di intersezione P_0

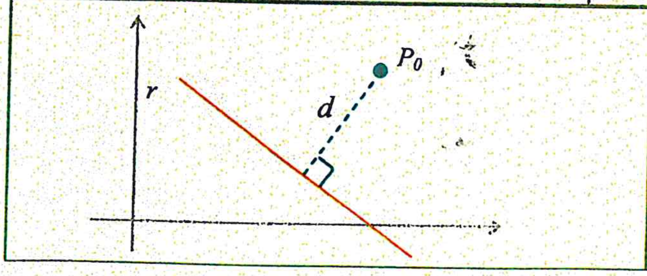
condizione di appartenenza di un punto $P_0(x_0, y_0)$ ad una retta



per verificare se un punto $P_0(x_0, y_0)$ appartiene ad una retta:

- si sostituiscono le coordinate x_0, y_0 del punto alla x e alla y nell'equazione della retta
- si sviluppano i calcoli
- se si ottiene una identità, il punto appartiene alla retta

distanza di un punto $P_0(x_0, y_0)$ da una retta r



$d = \dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	formula con l'equazione della retta in forma implicita $ax + by + c = 0$
$d = \dfrac{\lvert y_0 - mx_0 - q \rvert}{\sqrt{m^2 + 1}}$	formula con l'equazione della retta in forma esplicita $y = mx + q$

Esempio

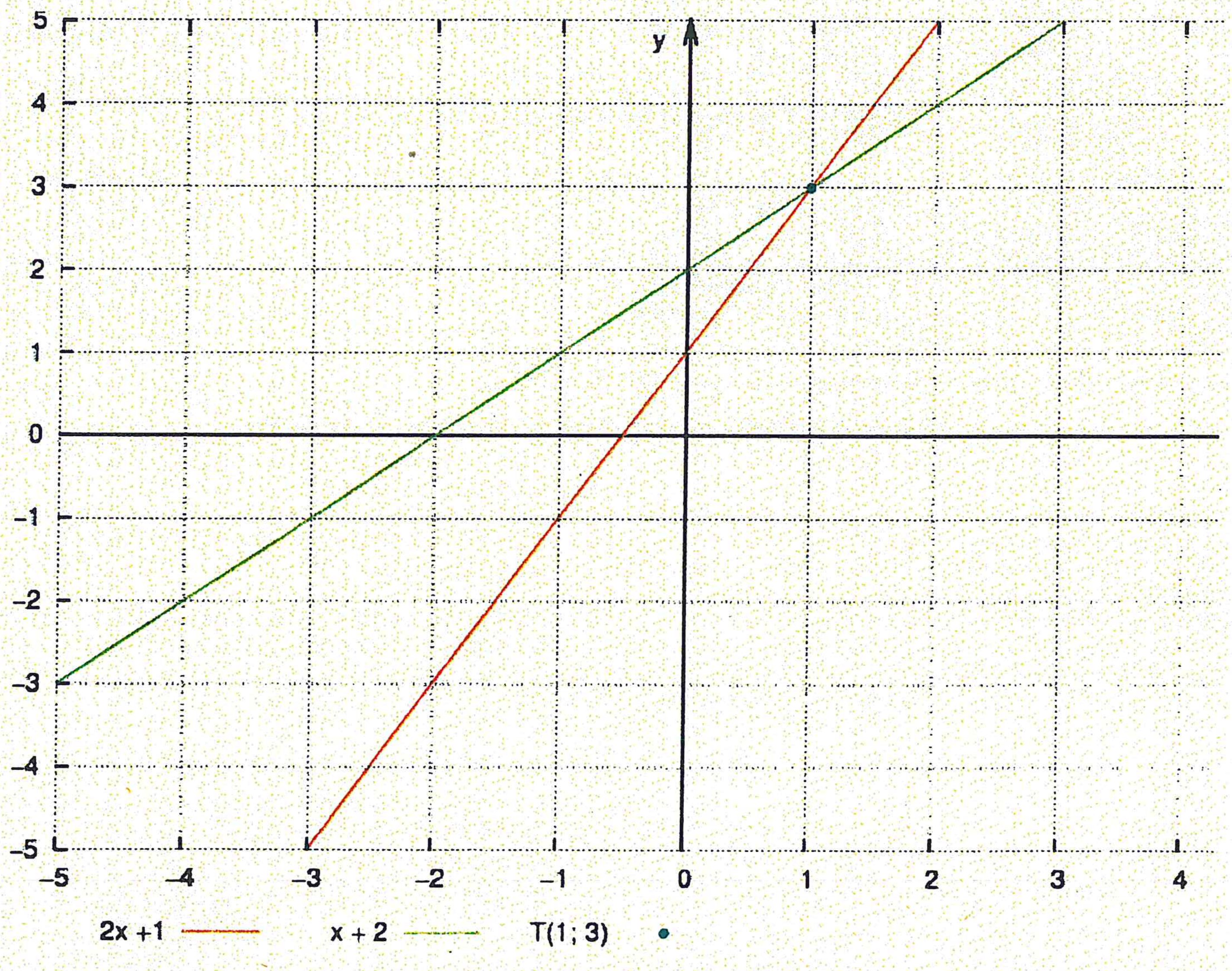
Determinare l'intersezione delle rette

$$r : y = 2x + 1$$

$$s : y = x + 2$$

Intersezioni grafiche

In un sistema di coordinate cartesiano, per disegnare le rette si individuano due punti appartenenti a ciascuna di esse e si tracciano le rette che li congiungono (grafico di una retta).



Il grafico mostra che l'intersezione delle rette è il punto *T(1; 3)*.

X

Calcolo delle intersezioni

Le coordinate del punto d'intersezione soddisfano entrambe le equazioni delle due rette, quindi per trovare $(x_0; y_0)$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x + 2 \end{cases}$$ ricaviamo *x* dalla seconda equazione e lasciamo la prima invariata

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x = y - 2 \end{cases}$$ sostituiamo nella prima equazione il valore di *x* trovato

$$\begin{cases} y = 2 * (y - 2) + 1 \\ x = y - 2 \end{cases}$$ svolgiamo i calcoli nella prima equazione e ricaviamo il valore di *y*

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = y - 2 \end{cases}$$ ricaviamo il valore di *x* sostituendo la *y*

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 3 - 2 \end{cases}$$ abbiamo ottenuto le coordinate del punto di intersezione

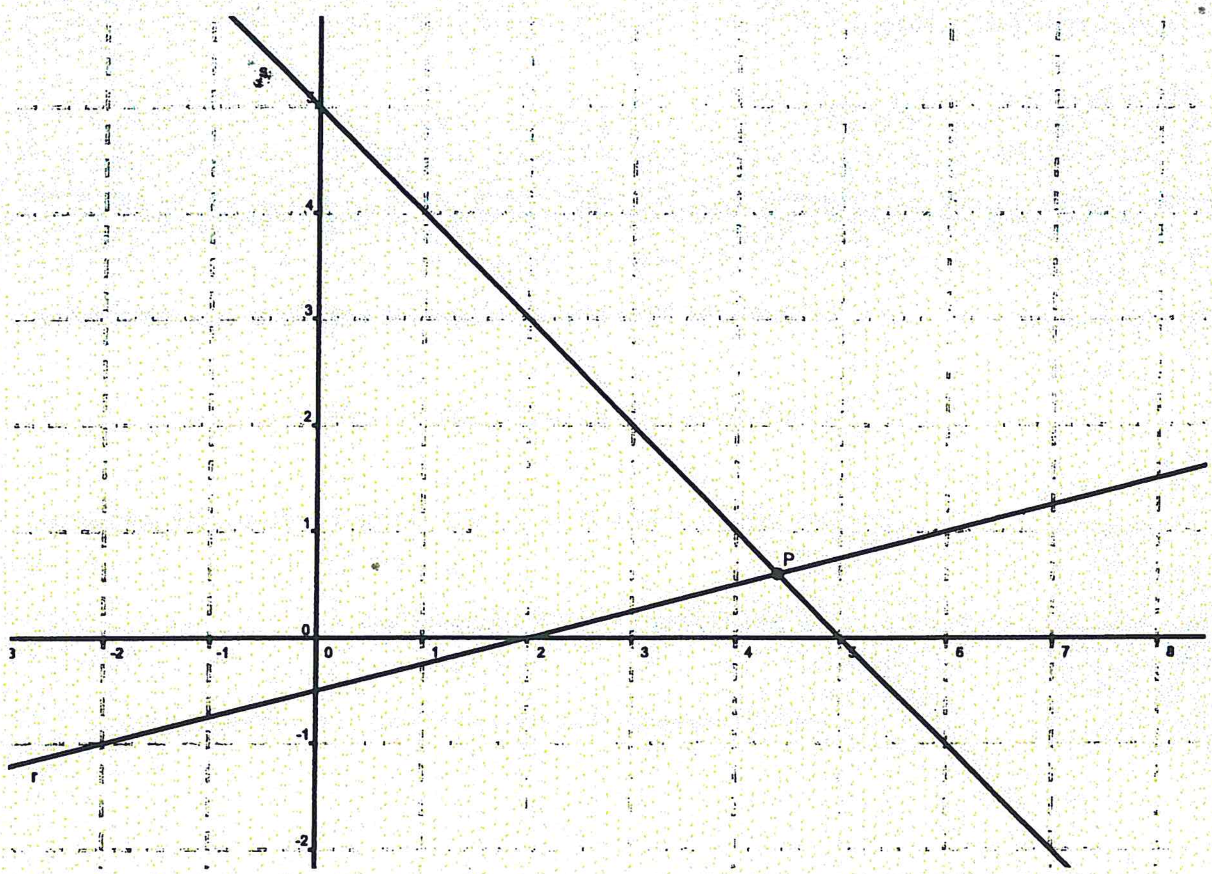
L'intersezione delle due rette è il punto *T(1; 3)*.

Procedendo sia graficamente sia analiticamente abbiamo ottenuto lo stesso risultato.

Esercizi svolti sull'intersezione di due rette

Esercizio 1. *Tracciare il grafico delle rette* $r : y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ *e* $s : y = -x + 5$ *e determinare le coordinate del loro punto di intersezione.*

Soluzione:



Determiniamo ora le coordinate del punto di intersezione:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \\ y = -x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = -x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \\ \frac{x-2}{4} = \frac{-4x+20}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

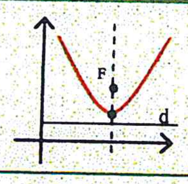
$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \\ x - 2 = -4x + 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \\ 5x = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \\ x = \frac{22}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4} \cdot \frac{22}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \\ x = \frac{22}{5} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{22}{5}; \frac{3}{5}\right).$$

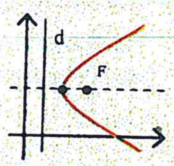
9

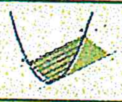
Parabola

parabola

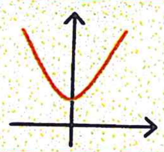
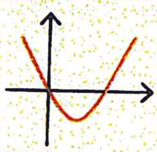
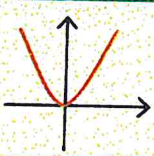
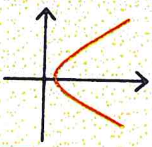
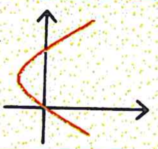
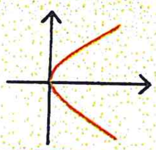


La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F detto fuoco e da una retta data d detta direttrice: $PF = Pd$

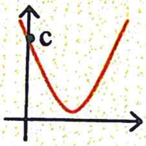
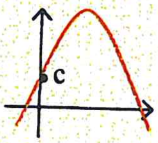
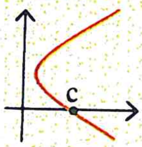
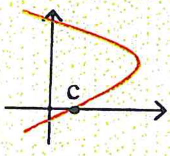


parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y		parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x
$y = ax^2 + bx + c$	equazione completa	$x = ay^2 + by + c$
$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $\Delta = b^2 - 4ac$	coordinate del **vertice**	$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$ $\Delta = b^2 - 4ac$
$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$	coordinate del **fuoco**	$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$
$x = -\frac{b}{2a}$	equazione dell'**asse**	$y = -\frac{b}{2a}$
$y = \frac{-1-\Delta}{4a}$	equazione della **direttrice**	$x = \frac{-1-\Delta}{4a}$
$\frac{y_0 + y}{2} = ax_0 \cdot x + b\frac{x_0 + x}{2} + c$	equazione della retta tangente alla parabola nel punto $P(x_0, y_0)$: formula di **sdoppiamento**	$\frac{x_0 + x}{2} = ay_0 \cdot y + b\frac{y_0 + y}{2} + c$
$\mathcal{A} = \frac{2}{3}\mathcal{R}$	**area** del segmento parabolico formula di Archimede	 

equazione incompleta

					
b=0 $y = ax^2 + c$	*c=0* $y = ax^2 + bx$	*b=0 c=0* $y = ax^2$	*b=0* $x = ay^2 + c$	*c=0* $x = ay^2 + by$	*b=0 c=0* $x = ay^2$

significato grafico del coefficiente a e del coefficiente c

			
$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$

se a=0 la parabola degenera in una retta

ricerca dell'equazione di una parabola

per trovare l'equazione di una parabola è necessario:

- avere tre condizioni (scelte tra: fuoco, vertice, asse, direttrice, passaggio per un punto, retta tangente)
- trasformare ogni condizione in una equazione
- ottenere il sistema delle tre equazioni nelle incognite a, b, c
- risolvere il sistema e trovare i valori di a, b, c
- sostituire i valori ottenuti nell'equazione della parabola, ottenendo l'equazione cercata

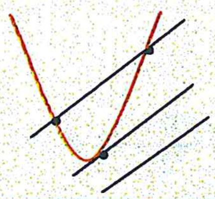
ricorda che nel caso si conosca il vertice, è vantaggioso sfruttare le seguenti due condizioni:

- passaggio della parabola per il punto Vertice
- porre $-\frac{b}{2a}$ *uguale alla coordinata del vertice nota*

Non conviene utilizzare l'altra coordina del vertice $-\frac{\Delta}{4a}$ perché questa condizione genera una equazione di secondo grado

Parabola

condizione di appartenenza di un punto alla parabola
per stabilire se un dato punto $P(x_0, y_0)$ appartiene alla parabola: • sostituire le coordinate di $P(x_0, y_0)$ nell'equazione della parabola • se si ottiene un'identità, $P(x_0, y_0)$ appartiene alla parabola

posizione reciproche di una retta rispetto ad una parabola	
per stabilire se una retta è secante, tangente o esterna alla parabola bisogna: • ricavare la y dell'equazione della retta e sostituirla nell'equazione della parabola • si ottiene un'equazione di II grado e se ne calcola il $\Delta = b^2 - 4ac$ • se Δ è $\begin{cases} > 0 \ \textit{la retta è secante (2 punti in comune)} \\ = 0 \ \textit{la retta è tangente (1 punto in comune)} \\ < 0 \ \textit{la retta è esterna (nessun punto in comune)} \end{cases}$	

ricerca dell'equazione di una retta tangente alla parabola	
da un punto esterno $P(x_0, y_0)$	**di assegnato coefficiente angolare m**
• si scrive l'equazione del fascio di rette proprio di centro $P(x_0, y_0)$: $y - y_0 = m(x - x_0)$ • si ricava la y dall'equazione del fascio	• si scrive l'equazione del fascio di rette improprio con $\boldsymbol{m}$ assegnato: $y = \boldsymbol{m}x + q$ • si ricava la y dall'equazione del fascio
• si sostituisce la y trovata nell'equazione della parabola	• si sostituisce la y nell'equazione della parabola
• si ottiene un'equazione di II grado in x	• si ottiene un'equazione di II grado in x
• si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0: $\Delta = 0$ ottenendo una equazione nell'incognita m	• si ricava il Δ e lo si impone uguale a 0: $\Delta = 0$ ottenendo una equazione nell'incognita q
• si risolve l'equazione in m	• si risolve l'equazione in q
• si sostituiscono i valori m_1 ed m_2 nell'equazione del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti	si sostituiscono i valori q_1 e q_2 nell'equazione del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti

Trovare le intersezioni tra la retta di equazione $x+y-1=0$ e la parabola di equazione $y=x^2+x-2$.

- Scrivo il sistema formato dalle due equazioni

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ y=x^2+x-2 \end{cases}$$

- Risolvo il sistema col metodo di sostituzione

$$\begin{cases} x+(x^2+x-2)-1=0 \\ \ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} x+x^2+x-2-1=0 \\ \ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+2x-3=0 \\ \ldots \end{cases}$$

- Calcolo il discriminante dell'equazione

$$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4(1)(-3)=4+12=16$$

Il discriminante è positivo quindi procedo.

- Risolvo l'equazione $x^2+2x-3=0$

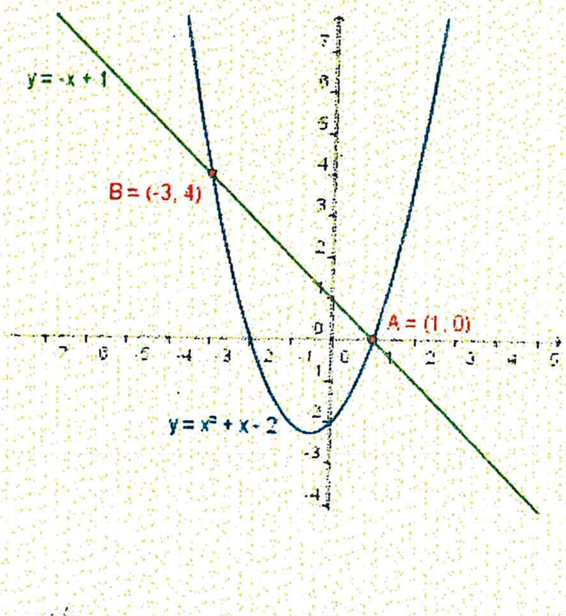
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(2)\pm\sqrt{16}}{2(1)}=\frac{-2\pm4}{2} \quad \text{da cui } x_1=\frac{-2+4}{2}=1 \text{ e } x_2=\frac{-2-4}{2}=-3$$

- Completo la risoluzione del sistema calcolando i valori di y

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=x^2+x-2=(1)^2+(1)-2=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=x^2+x-2=(-3)^2+(-3)-2=4 \end{cases}$$

Quindi la retta e la parabola si intersecano nei due punti: A(1 ; 0) e B(−3 ; 4).

- Verifico graficamente le soluzioni trovate



Trovare le intersezioni tra la retta di equazione $y = x + 8$ e la parabola di equazione $y = -x^2 - 3x + 4$.

- Scrivo il sistema formato dalle due equazioni

$$\begin{cases} y = x + 8 \\ y = -x^2 - 3x + 4 \end{cases}$$

- Risolvo il sistema col metodo del confronto

$$\begin{cases} \dots \\ x + 8 = -x^2 - 3x + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

- Calcolo il discriminante dell'equazione

$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$

Il discriminante è nullo quindi troverò una sola soluzione.

- Risolvo l'equazione $x^2 + 4x + 4 = 0$

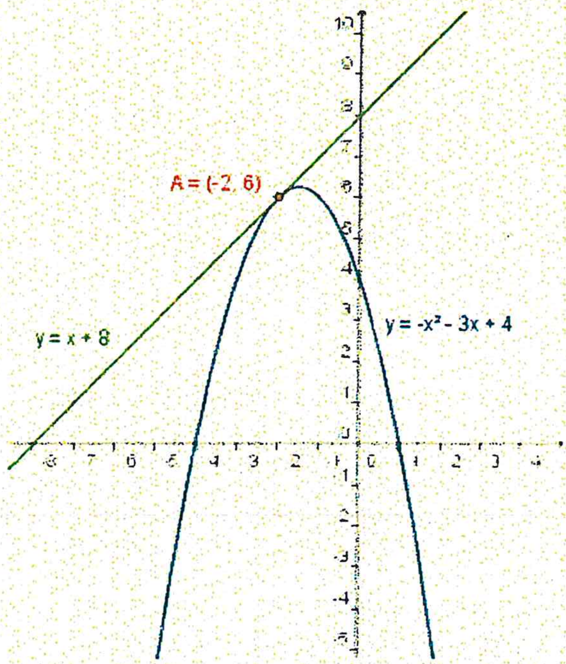
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(4)}{2(1)} = -2$$

- Completo la risoluzione del sistema calcolando il valore di y

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = x + 8 = -2 + 8 = 6 \end{cases}$$

Quindi la retta è tangente alla parabola nel punto: A(−2 ; 6).

- Verifico graficamente



Logaritmi

definizione

il logaritmo di un numero è l'esponente x da dare alla base a per ottenere l'argomento b cioè: $a^x = b$

$\log_a b = x$	a si chiama **base** b si chiama **argomento** x è il **logaritmo** in base a di b	la base a deve essere > 0 e $\neq 1$ l'argomento b deve essere > 0 il logaritmo x è un numero reale $\mathbb{R}$

proprietà

$\log_a a = 1$	$\log_a 1 = 0$	$a^x > 0$

teoremi principali sui logaritmi

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	teorema del prodotto	$\log_2 3x = \log_2 3 + \log_2 x$
$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$	teorema del rapporto	$\log_2 \frac{x}{3} = \log_2 x - \log_2 3$
$\log_a b^c = c \log_a b$	teorema della potenza	$\log_2 x^3 = 3 \log_2 x$

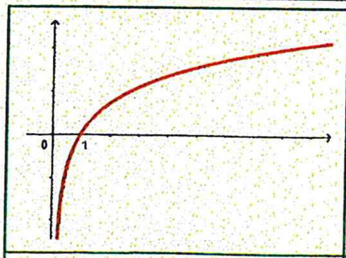
proprietà derivate dai teoremi principali

$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$	potenza alla base e all'argomento	$\log_{2^3} x^4 = \frac{4}{3} \log_2 x$
$\log_{\frac{1}{a}} b = \log_{a^{-1}} b = -\log_a b$	base frazionaria	$\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$
$\log_a \frac{1}{b} = \log_a b^{-1} = -\log_a b$	argomento frazionario	$\log_2 \frac{1}{x} = -\log_2 x$
$\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} = \log_{a^{-1}} b^{-1} = \log_a b$	base e argomento frazionario	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = \log_2 x$
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	scambiare la base con l'argomento	$\log_2 x = \frac{1}{\log_x 2}$
$\log_n b = \frac{\log_v b}{\log_v n}$ $\quad v = vecchia\ base$, $n = nuova\ base$	formula del cambio di base	$\log_3 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 3}$
$n = \log_a a^n$	trasformare un numero n in logaritmo in base a	$5 = \log_2 2^5$
$n = a^{\log_a n}$	trasformare un numero n in potenza	$5 = 2^{\log_2 5}$

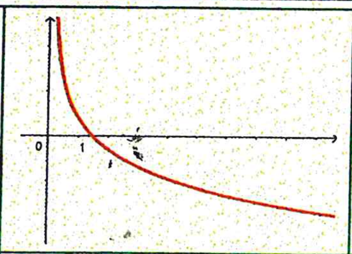
con il simbolo $\ln x$ si indica il logaritmo in base e dove $e = 2{,}71828182845 \ldots$ è detto "numero di Nepero"

sulle calcolatrici scientifiche sono presenti i tasti **lg** e **ln** che consentono di calcolare i logaritmi in base 10 e in base "e". Per calcolare un logaritmo in una base diversa è necessario utilizzare la formula del cambio di base

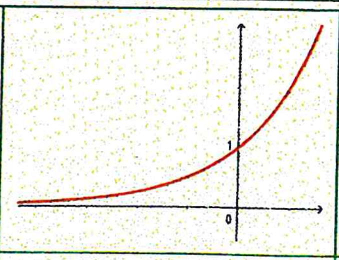
grafici delle funzioni logaritmo ed esponenziale



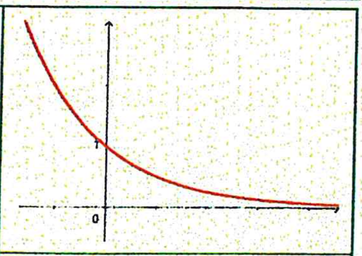
$y = \log_a x$
logaritmo con base a > 1



$y = \log_a x$
logaritmo con base 0 < a < 1



$y = a^x$
esponenziale con base a > 1



$y = a^x$
esponenziale a base 0 < a < 1

EQUAZIONI ESPONENZIALI

<u>Le equazioni esponenziali sono equazioni in cui l'incognita x si trova ad esponente.</u> Un primo metodo per cercare di risolvere un'equazione esponenziale è quello di cercare di ricondurla alla forma:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

- In questa forma le espressioni ad esponente $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni algebriche in x (polinomi, frazioni, numeri…)
- Notare che in questa equazione la base della potenza è la stessa in entrambi i membri dell'equazione; dato che le potenze hanno lo stesso valore ed hanno uguale base devono avere anche uguale esponente. <u>L'equazione si risolverà quindi uguagliando gli esponenti</u>

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$ <u>si uguagliano gli esponenti ottenendo</u> $f(x) = g(x)$

L'equazione così ottenuta è algebrica e quindi si risolve con i metodi già noti. Vediamo qui sotto tre esempi in cui si usa questo metodo.

---

a) $5^{2x+1} = \frac{1}{25}$ diventa $5^{2x+1} = 5^{-2}$ uguagliamo gli esponenti: $2x+1=-2$

da cui: $2x=-3$ e quindi $x = -\frac{3}{2}$

---

b) $8^{5x} \cdot 4^{x+2} = \frac{1}{16}$ sono tutte potenze di 2 per cui trasformiamo: $(2^3)^{5x} \cdot (2^2)^{x+2} = 2^{-4}$

applichiamo le proprietà delle potenze ottenendo: $2^{15x} \cdot 2^{2(x+2)} = 2^{-4}$

e quindi $2^{15x+2(x+2)} = 2^{-4}$

uguagliamo gli esponenti: $15x + 2(x+2) = -4$

da cui: $15x + 2x + 4 = -4 \quad \rightarrow \quad 17x = -8 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{8}{17}$

---

c) $\frac{3^{2x} \cdot 3 \cdot 27^{2x-1}}{9^{4x-1} \cdot 81^x} = 1$ sono tutte potenze di 3 per cui trasformiamo: $\frac{3^{2x} \cdot 3 \cdot 3^{3(2x-1)}}{3^{2(4x-1)} \cdot 3^{4x}} = 3^0$

applichiamo le proprietà delle potenze* ottenendo: $3^{2x+1+3(2x-1)-2(4x-1)-4x} = 3^0$

uguagliamo gli esponenti: $2x + 1 + 3(2x-1) - 2(4x-1) - 4x = 0$

da cui: $2x + 1 + 6x - 3 - 8x + 2 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad -4x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

---

* *ricordare che nel caso di divisioni tra potenze di uguale base gli esponenti vanno sottratti*

15

ALTRI ESEMPI RISOLTI

1. $16^x \cdot 4^{\frac{2x+1}{x}} = 64^{x-1}$ sono tutte potenze di 4 che trasformiamo: $4^{2x} \cdot 4^{\frac{2x+1}{x}} = 4^{3(x-1)}$

da cui: $4^{2x+\frac{2x+1}{x}} = 4^{3x-3}$ uguagliamo gli esponenti: $2x + \dfrac{2x+1}{x} = 3x - 3$

da cui: $-x + \dfrac{2x+1}{x} + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{-x^2 + 2x + 1 + 3x}{x} = 0$ C.E. $x \neq 0$

semplificato il denominatore e ordinando: $-x^2 + 5x + 1 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+4}}{-2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{29}}{-2} = \dfrac{5 \mp \sqrt{29}}{2}$ $\quad x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{29}}{2}$ $\quad x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{29}}{2}$

entrambe le soluzioni sono accettabili.

....

2. $\dfrac{11^x \cdot \sqrt[5]{121^{x-3}}}{11^{\frac{x-2}{x+1}}} = 1$ sono tutte potenze[♥] di 11 che trasformiamo: $\dfrac{11^x \cdot 121^{\frac{x-3}{5}}}{11^{\frac{x-2}{x+1}}} = 11^0$

da cui: $\dfrac{11^x \cdot 11^{\frac{2(x-3)}{5}}}{11^{\frac{x-2}{x+1}}} = 11^0 \quad \rightarrow \quad 11^{x+\frac{2(x-3)}{5}-\frac{x-2}{x+1}} = 11^0$

uguagliamo gli esponenti: $x + \dfrac{2x-6}{5} - \dfrac{x-2}{x+1} = 0$ facciamo il m.c.m. a denominatore:

$\dfrac{5x(x+1) + (2x-6)(x+1) - 5(x-2)}{5(x+1)} = 0$ C.E. $x \neq -1$

semplificato il denominatore e sviluppando i calcoli:

$5x^2 + 5x + 2x^2 + 2x - 6x - 6 - 5x + 10 = 0 \quad \rightarrow \quad 7x^2 - 4x + 4 = 0$

e con la formula ridotta: $x_{1,2} = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{4-28}}{7} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-24}}{7}$

quindi non ci sono soluzioni reali alla nostra equazione.

....

3. $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 155$ spezziamo le potenze: $\rightarrow \quad 5^x + 5^x \cdot 5 + 5^x \cdot 5^2 = 155$

raccogliamo il fattore comune 5^x: $\rightarrow \quad 5^x \cdot (1 + 5 + 5^2) = 155$ otteniamo poi:

$5^x \cdot 31 = 155 \quad \rightarrow \quad 5^x = \dfrac{155}{31} \quad \rightarrow \quad 5^x = 5 \quad \rightarrow \quad 5^x = 5^1 \quad \rightarrow \quad x = 1$

....

♥ *ricordiamo che i radicali danno esponenti frazionari:* *es.* $\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Definizione

Un' equazione si dice logaritmica quando l' incognita compare nell' argomento di almeno un logaritmo.

Esempi:

$\log(x+3)=5$ è un'equazione logaritmica

$(x-5)\log 3 = 7$ NON è un'equazione logaritmica

Consideriamo le equazioni logaritmiche che possiamo scrivere nella forma:

$$\log_a A(x) = \log_a B(x)$$

dove con $A(x)$ e $B(x)$ indicano due funzioni nell'incognita x.

Per le condizioni di esistenza dei logaritmi deve essere $\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$

Dal momento che

$$\log_a A(x) = \log_a B(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad A(x) = B(x)$$

per risolvere l' equazione è sufficiente cercare le soluzioni di $A(x)=B(x)$ e controllare successivamente se queste soddisfano le condizioni di esistenza.

ESEMPIO SVOLTO n. 1

$$\log x + \log(x+3) = \log 2 + \log(2x+3)$$

Condizioni di esistenza:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x+3 > 0 \\ 2x+3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \\ x > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \quad x > 0$$

cioè C.E.: $x > 0$.

Applichiamo la proprietà del logaritmo di un prodotto:

$$\log x(x+3) = \log 2(2x+3) \rightarrow \quad \log\left(x^2+3x\right) = \log(4x+6)$$

Passando all'uguaglianza degli argomenti:

$A(x) = B(x) \quad \rightarrow \quad x^2 + 3x = 4x + 6 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$

; $\quad x_1 = -2; x_2 = 3$

Il valore -2 non soddisfa la condizione di esistenza posta ($x > 0$), che è invece soddisfatta da 3, quindi l' unica soluzione dell' equazione logaritmica iniziale è $x = 3$.

ESEMPIO SVOLTO n. 2

$$\log(x+3) + \log x = 1$$

Le condizioni di esistenza dei logaritmi sono date dalle soluzioni del sistema di disequazioni $\begin{cases} x+3>0 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow x>0$ quindi C.E. $x > 0$

Applicando la proprietà del logaritmo di un prodotto al primo membro si avrà:

$$\log[x(x+3)] = 1$$

Il secondo membro può essere sostituito da $\log 10$, in quanto il logaritmo di 10 (in base 10) è proprio uguale ad 1:

$$\log[x(x+3)] = \log 10$$

Ora è possibile uguagliare gli argomenti:

$$x(x+3) = 10$$

Questa è una semplice equazione di secondo grado che ha come soluzioni:

$x_1 = -5 \quad$ e $\quad x_2 = +2$

Considerando le condizioni di esistenza trovate prima, si vede che **solo la seconda soluzione è accettabile**, mentre la prima è da scartare in quanto rende negativi gli argomenti dei logaritmi.

ESEMPIO SVOLTO n. 3

$$\log(x-2) - \log(x-1) = \log 5$$

Le condizioni di esistenza sono date dalle soluzioni del sistema di disequazioni

$\begin{cases} x-2>0 \\ x-1>0 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} x>2 \\ x>1 \end{cases} \rightarrow x>2 \quad$ quindi C.E. $\quad x > 2$

Quindi avremo:

$$\log(x-2)=\log(x-1)+\log 5$$

Applicando la proprietà del logaritmo di un prodotto otteniamo:

$$\log(x-2)=\log 5(x-1)$$

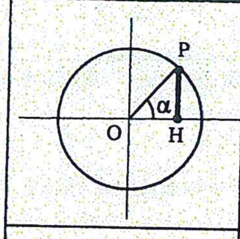
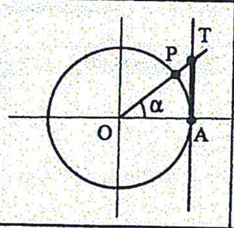
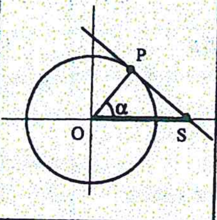
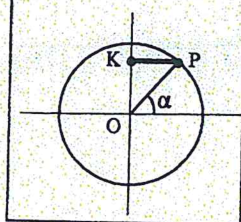
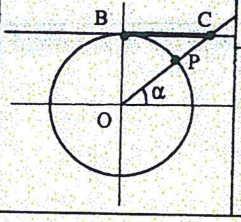
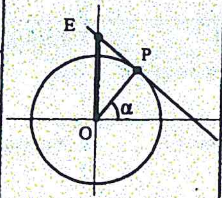
Uguagliando gli argomenti avremo la seguente equazione equivalente:

$$x-2=5(x-1)\rightarrow x-2=5x-5\rightarrow x-5x=2-5\rightarrow -4x=-3\rightarrow \frac{-4x}{-4}=\frac{-3}{-4}$$

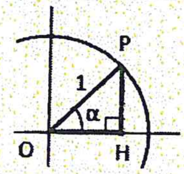
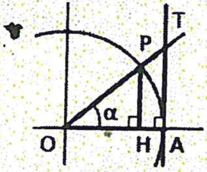
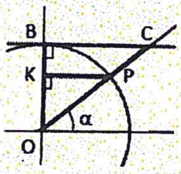
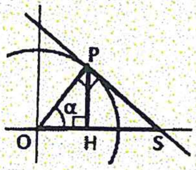
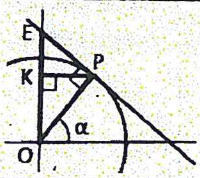
Da cui $x=\frac{3}{4}$. Poiché le condizioni di esistenza non sono soddisfatte in quanto $\frac{3}{4}<2$, l' equazione è <u>IMPOSSIBILE.</u>

Funzioni goniometriche e relazioni fondamentali

funzioni goniometriche della circonferenza di centro O e raggio 1

	**seno α** $sen\alpha = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \overline{PH}$		**tangente α** $tg\alpha = \frac{\overline{TA}}{\overline{OP}} = \overline{TA}$		**secante α** $sec\,\alpha = \frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \overline{OS}$
	**coseno α** $cos\alpha = \frac{\overline{PK}}{\overline{OP}} = \overline{PK}$		**cotangente α** $ctg\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OP}} = \overline{BC}$		**cosecante α** $cosec\,\alpha = \frac{\overline{OE}}{\overline{OP}} = \overline{OE}$

le cinque relazioni fondamentali

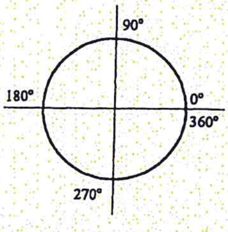
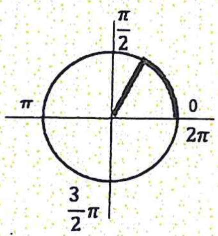
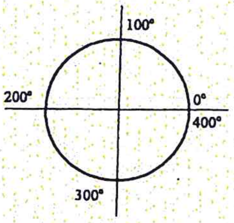
				
$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$	$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$	$ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$	$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$	$cosec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$

Relazioni che esprimono una funzione goniometrica rispetto alle altre

$sen\alpha$ in funzione di ...	$cos\alpha$ in funzione di ...
$sen\alpha = \pm\sqrt{1-cos^2\alpha}$	$cos\alpha = \pm\sqrt{1-sen^2\alpha}$
$sen\alpha = \pm\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$
$sen\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$cos\alpha = \pm\frac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$

$tg\alpha$ in funzione di ...	$ctg\alpha$ in funzione di ...
$tg\alpha = \pm\frac{sen\alpha}{\sqrt{1-sen^2\alpha}}$	$ctg\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-sen^2\alpha}}{sen\alpha}$
$tg\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-cos^2\alpha}}{cos\alpha}$	$ctg\alpha = \pm\frac{cos\alpha}{\sqrt{1-cos^2\alpha}}$
$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$	$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$

unità di misura di angoli

	**grado sessagesimale** è la 360ª parte dell'angolo giro		**radiante** è l'angolo il cui arco è uguale al raggio		**grado centesimale** è la 400ª parte dell'angolo giro

passaggio di unità di misura

da gradi sessagesimali a radianti	da radianti a gradi sessagesimali	da gradi centesimali a sessagesimali e viceversa
$180°:\pi = \alpha°:x_{rad}$ $\quad x_{rad} = \frac{\alpha°\cdot\pi}{180°}$	• sostituire a $\pi \rightarrow 180°$ • semplificare	$180°:200^c = \alpha°:\alpha^c$

20

COGNOME .... NOME.................................CLASSE 3^ .... DATA ....

PUNTEGGIO : è **indicato per ciascun esercizio ESATTO.**

Grafico della retta	Disegna la retta Y=2X+1 sul piano cartesiano. (PUNTI 1)
Grafico della parabola	Disegna la parabola di equazione $Y=3X^2+2X+1$, per punti, dopo aver trovato asse e vertice. (PUNTI 1)
Intersezioni algebrica tra rette	Calcola le coordinate dei punti di intersezione tra le rette di equazione 4X+Y−6=0 e 2X+3Y−8=0. (PUNTI 1,5)
Intersezioni algebrica tra retta e parabola	Trova i punti di intersezione tra la parabola $Y=3X^2+2X+1$ e la retta y=4X+2. (PUNTI 2)
Disequazione di 2^grado	Risolvi: $5X^2+2X-7>0$. (PUNTI 1,5)
DISEQUAZIONE FRATTA	$\frac{7x-14}{x^2+2x-3}>\mathbf{0}$. (PUNTI 2)
Equazione logaritmica	$\log(x+1)+\log(x-1)=\log(15)$ (PUNTI 1)

Copia il testo che intendi svolgere ed esegui, nell'ordine da te preferito.